

Α. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Επιλέγετε και απαντάτε σε ένα (1) από τα δύο θέματα θεωρίας

ΘΕΜΑ 1^ο

Α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$

β) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

γ) Η εξίσωση $x^2 - \alpha = 0$ έχει δύο λύσεις $x = \sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$

δ) Αν Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$
τότε αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

ΘΕΜΑ 2^ο

Α) Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

β) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

Β. ΘΕΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επιλέγετε και λύνετε **δύο (2)** από τις τρεις ασκήσεις

ΘΕΜΑ 1^ο

1) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$.

2) Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση και να εξετάσετε αν έχει τις ίδιες λύσεις με την παραπάνω εξίσωση.

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = 2x^2 - 2,$$

$$B = x^2 + x - 2$$

$$\Gamma = x^2 + 2x + 1$$

- i) Να λυθεί η εξίσωση $B=0$
- ii) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις A, B, Γ
- iii) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{A}{B} = 3$

ΘΕΜΑ 2°

Αν για την οξεία γωνία ω ισχυρι ότι $(\eta\mu\omega-4)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=13$

α) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$.

β) Αν το ημίτονο της γωνίας ω είναι $\eta\mu\omega=\frac{1}{2}$

i. να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\varphi\omega$

ii να βρείτε την τιμή της παράστασης $K=2\eta\mu(180-\omega)+\frac{4}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\omega-\sqrt{3}\epsilon\varphi(180-\omega)$

ΘΕΜΑ 3°

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$ να φέρεται τα ύψη $B\Delta$ και ΓE .

A) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

B) Χρησιμοποιώντας στοιχεία από την ισότητα των τριγώνων του ερωτήματος Α, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.

Γ) Να αποδείξετε ότι $BE=\Gamma\Delta$, $B\hat{\Gamma}E = \Gamma\hat{B}\Delta$ και $AE=A\Delta$

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

A. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x^2 - x$$

$$B = x^2 - 3x + 2$$

$$\Gamma = x^2 + 4x + 4$$

B. Αν A, B και Γ οι παραστάσεις του ερωτήματος A, να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{3x+6}$ έχει λύσεις

τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 4$.

Γ. Αν α η θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και β η αρνητική της ρίζα, να λυθεί το σύστημα (Σ):

$$\begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}$$

Άσκηση 2^η

A. Αν $0^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να υπολογισθούν:

α. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

β. Η τιμή της παράστασης $A = \frac{5\eta\mu\omega - 3\varepsilon\varphi\omega}{10\sigma\upsilon\nu\omega} + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2(180^\circ - \omega)$.

B. Έστω οι παραστάσεις $A = \eta\mu 32^\circ - \varepsilon\varphi 124^\circ$ και $B = \frac{(2 - \eta\mu\omega) \cdot \eta\mu 111^\circ}{(\sigma\upsilon\nu\omega - 3)^3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A είναι θετική.

β. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω , ισχύει ότι $A > B$.

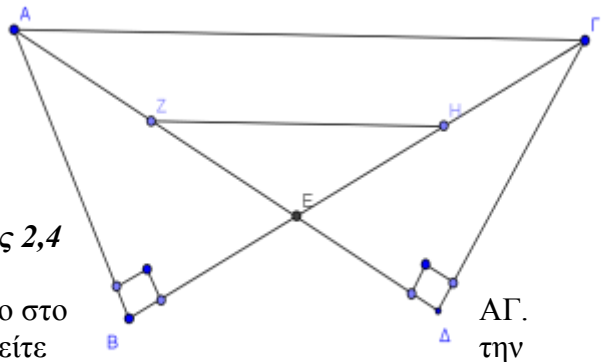
Άσκηση 3^η

Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ABΓ και AΔΓ και E το σημείο τομής των BΓ και ΔA. Αν Z το μέσο της AE και H το μέσο της EG και $AB = \Delta\Gamma$:

A. Να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ABE και ΓΔE είναι ίσα.

Μονάδες 2,4

B. Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο AEG είναι ισοσκελές, και επιπλέον ότι το τμήμα ZH είναι παράλληλο στο Γ. Αν επιπλέον τα μήκη $BZ = 10$ cm και $A\Gamma = 20$ cm, να βρείτε περίμετρο του τετραπλεύρου AZHG.



ΑΣΚΗΣΗ 1

A) Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος $\begin{cases} \beta = 18 - \alpha \\ \alpha + 5\beta = 50 \end{cases}$ είναι $(\alpha, \beta) = (10, 8)$

B) Αν τα α, β είναι οι αριθμοί που βρήκατε στο A) ερώτημα, να αποδείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση $(x - \alpha)^2 - (x - \beta)(x + \beta) + 20x$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ο κ. Σωτηράκης έφερε από το σπίτι την εξίσωση $\frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{20x}{25-x^2} = -2x + \frac{20}{x-5}$

A. Η κ. Παπαλαζάρου μόλις την είδε ρώτησε ποιες τιμές δεν επιτρέπεται να πάρει ο x ; Απαντήστε με αιτιολόγηση στο ερώτημά της.

B. Ο κ. Ρούσος πήρε το 1^ο μέλος της εξίσωσης, το ονόμασε $A = \frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{20x}{25-x^2}$ και κάνοντας

τις κατάλληλες πράξεις απέδειξε ότι η παράσταση $A = \frac{2(x+5)}{x-5}$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του κάνοντας κι εσείς τις πράξεις.

Γ. Βοηθήστε τώρα τον κ. Σωτηράκη να λύσει επιτέλους την εξίσωση $A = -2x + \frac{20}{x-5}$

ΑΣΚΗΣΗ 3 Αν η γωνία ω είναι αμβλεία και $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$,

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$, $\epsilon\phi\omega = -\frac{12}{5}$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

Γ2. Να συμπληρώσετε τα κενά: $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \dots$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots$

Γ3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\epsilon\phi 135^\circ \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega)}$

ΘΕΜΑ Α

A1. Να παραγοντοποιήσετε τις ποσότητες : α) $x^2 - 9$ β) $x^2 - 3x$ γ) $x^2 + 3x$

A2. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x^2-3x} = -\frac{1}{x^2+3x}$

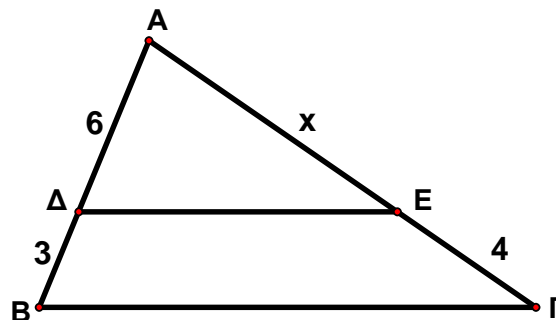
ΘΕΜΑ Β

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$.

B1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta A\Delta E$ και $\Delta A B\Gamma$ είναι όμοια.

B2. Να αποδείξετε ότι $x = 8$.

B3. Αν το τρίγωνο $\Delta A\Delta E$ έχει εμβαδόν 20 cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta A B\Gamma$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) :
$$\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Γ2. Αν το σύστημα (Σ_2) :
$$\begin{cases} 2ax - \beta y = -10 \\ \alpha x + 3\beta y = 16 \end{cases}$$
 έχει ως λύση, τη λύση του συστήματος (Σ_1) , να βρείτε τις τιμές των αριθμών α και β .

ΘΕΜΑ 1°

A. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{2x^2 - 2x + 1 - x}{(x-1)^2}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση $A + B = \frac{-2x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$

ΘΕΜΑ 2°

Αν γνωρίζετε ότι $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = \frac{1}{3}$, τότε:

A. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

B. Να αποδείξετε ότι: $4\sqrt{2} \cdot \epsilon\phi\omega + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \begin{cases} 3(2x - y) - 2x - 3(y - 1) = -1 \\ 5x - 2y = 4x - 2 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) \begin{cases} 1006x - 2012y = -2012 \\ 1008x - 2y = 2012 \end{cases}.$$

A. Να λύσετε το (Σ_1) .

B. Να εξετάσετε αν η λύση του (Σ_1) είναι και λύση του (Σ_2) .

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{X^2 - 7X + 10}{X - 5}$ με $X \neq 5$ και $B = \frac{X^3 - 2X^2 - 9X + 18}{9 - X^2}$ με $X \neq 3, -3$

A) Να λυθεί η εξίσωση $X^2 - 7X + 10 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $X^2 - 7X + 10$.

B) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις A και B .

Γ) Για $X = \sqrt{2}$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης $A^2 - B^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

A) Να λυθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση : $\frac{X+1}{X^2+2X} + \frac{X-3}{X^2-2X} = \frac{4}{X^2-4}$

B) Αν α η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μικρότερη λύση της να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = 4 \\ x - \alpha \beta y = 1 \end{cases}$$

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x, y)$, όπου (x, y) η λύση του παραπάνω συστήματος και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.

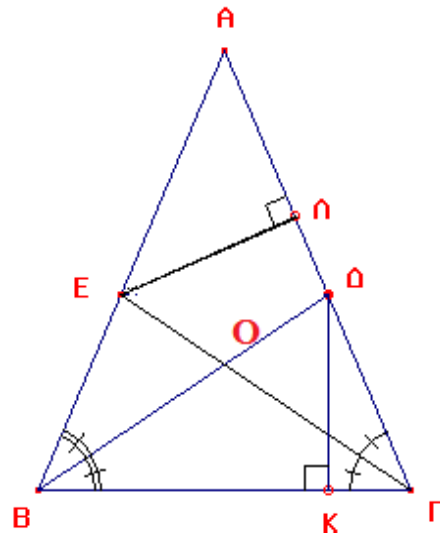
ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$, οι διχοτόμοι των γωνιών \hat{B} και $\hat{\Gamma}$, $B\Delta$ και ΓE αντίστοιχα , τέμνονται στο σημείο O . Αν $\Delta K \perp B\Gamma$ και $E\Lambda \perp AG$ τότε :

A) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma = BE\Gamma$ είναι ίσα.

B) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα $B\Delta K = \Gamma E\Lambda$ είναι ίσα.

Γ) Ναδειχτεί ότι τα τρίγωνα EBO και $EB\Gamma$ είναι όμοια.



ΘΕΜΑ 1°.

Δίνονται οι παραστάσεις : $A(\chi)=3(\chi-2)^2-2(1-2\chi)(1+2\chi)-8\chi^2-5(3-2\chi)+4$
 $B(\chi)=(\chi-2)^3+\chi^2(5-\chi)+9-12\chi.$

α. Να αποδείξετε ότι : $A(\chi)=3\chi^2-2\chi-1$ και $B(\chi)=1-\chi^2.$

β. Να λυθεί η εξίσωση : $A(X)=0$. Στη συνέχεια να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A(\chi)$ και $B(\chi)$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του χ ορίζεται το κλάσμα : $\frac{A(x)}{B(x)}$ και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το σύστημα : $3\chi-3(\chi-\psi)=5+\chi\psi-\chi(\psi+1)$

$$X-\frac{\psi}{2}=-2$$

α. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα (αφού κάνετε τις πράξεις) είναι ισοδύναμο με το σύστημα
 $\chi+3\psi=5$
 $2\chi-\psi=-4$

β. Να λύσετε το σύστημα .

ΘΕΜΑ 3° .

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG$ και M μέσον της $B\Gamma$. Αν $MK, M\Lambda$ τα κάθετα τμήματα προς τις πλευρές AB, AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα $BMK, \Gamma M\Lambda$ είναι ίσα.

β. Το τρίγωνο $MK\Lambda$ είναι ισοσκελές.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 2x^2 - 3x - 5$, $B = x^2 - 1$ και $\Gamma = x^2 - 2x + 1$

- i) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$
- ii) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A , B και Γ .
- iii) Να υπολογίσετε το γινόμενο $\frac{\Gamma \cdot A}{B \cdot x - 1}$ εκτελώντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 2(x - 1) - 3y = -2(y - 1) - 1 \\ 3(y - 2) - 2(2 - x) = 1 - x - 2y \end{cases} \quad (\Sigma)$$

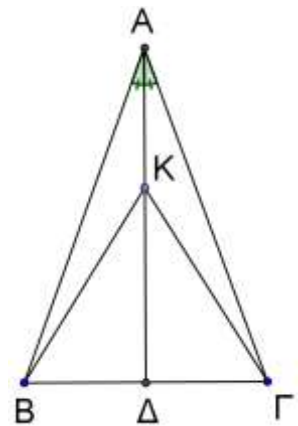
- i) Να φέρετε το (Σ) μετά από πράξεις στη μορφή
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 5y = 11 \end{cases} \quad (\Sigma_1)$$
- ii) Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) με όποια αλγεβρική μέθοδο θέλετε.

ΘΕΜΑ 3

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$ και η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .

Αν K τυχαίο σημείο πάνω στην $A\Delta$,

- i) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $AK\Gamma$ είναι ίσα.
- ii) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = (3x+2)^2 - 5(x-2)^2 - 4(8x-3)$ και
 $B(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$

- α) Να δείξετε ότι $A(x) = 4x^2 - 4$
β) Να παραγοντοποιηθεί το πολυώνυμο $B(x)$
γ) Για ποιές τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\frac{A(x)}{B(x)}$ και στη συνέχεια να απλοποιηθεί.

ΑΣΚΗΣΗ 2^ο

α) Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3x-18}{x^2-5x-6} = 1 - \frac{1}{x+1}$

β) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{x-y}{8} = 1-y \\ 3(2x-1) + 2(y+2) = 9 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3^ο

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=10$ cm και $A = 50^\circ$.

Στις πλευρές του AB και AG παίρνουμε σημεία K και Λ ώστε $AK=A\Lambda=4$ cm και M είναι το μέσο της $B\Gamma$.

- α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα KBM και $\Lambda M\Gamma$ είναι ίσα.
β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια και να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας τους.
γ) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδό 50 cm² να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου $AK\Lambda$.

